

Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана
Факультет "Фундаментальные науки"
Кафедра "Высшая математика"

Математика
Модуль 2. Пределы
Лекция 2.2

к.ф.-м.н. Семакин А.Н.



Окрестность точки



Окрестность точки

Под точкой понимается как действительное число, так и элементы $+\infty$, $-\infty$, ∞ .



Окрестность точки

Определение

ε -**окрестность** точки a обозначается как $U(a, \varepsilon)$ и определяется по формулам:



Окрестность точки

Определение

ε -**окрестность** точки a обозначается как $U(a, \varepsilon)$ и определяется по формулам:

1) a - действительное число



Окрестность точки

Определение

ε -**окрестность** точки a обозначается как $U(a, \varepsilon)$ и определяется по формулам:

1) a - действительное число

$$U(a, \varepsilon) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$$



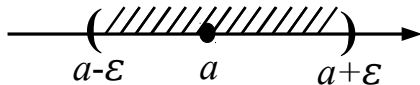
Окрестность точки

Определение

ε -**окрестность** точки a обозначается как $U(a, \varepsilon)$ и определяется по формулам:

1) a - действительное число

$$U(a, \varepsilon) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$$



Окрестность точки

Определение

ε -**окрестность** точки a обозначается как $U(a, \varepsilon)$ и определяется по формулам:

2) $a = +\infty$



Окрестность точки

Определение

ε -**окрестность** точки a обозначается как $U(a, \varepsilon)$ и определяется по формулам:

2) $a = +\infty$

$$U(+\infty, \varepsilon) = (\varepsilon, +\infty]$$



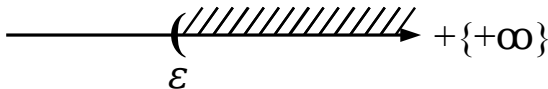
Окрестность точки

Определение

ε -**окрестность** точки a обозначается как $U(a, \varepsilon)$ и определяется по формулам:

2) $a = +\infty$

$$U(+\infty, \varepsilon) = (\varepsilon, +\infty]$$



Окрестность точки

Определение

ε -**окрестность** точки a обозначается как $U(a, \varepsilon)$ и определяется по формулам:

3) $a = -\infty$



Окрестность точки

Определение

ε -**окрестность** точки a обозначается как $U(a, \varepsilon)$ и определяется по формулам:

3) $a = -\infty$

$$U(-\infty, \varepsilon) = [-\infty, -\varepsilon)$$



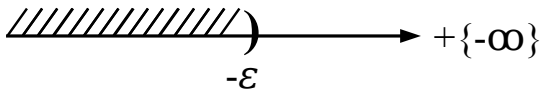
Окрестность точки

Определение

ε -**окрестность** точки a обозначается как $U(a, \varepsilon)$ и определяется по формулам:

3) $a = -\infty$

$$U(-\infty, \varepsilon) = [-\infty, -\varepsilon)$$



Окрестность точки

Определение

ε -**окрестность** точки a обозначается как $U(a, \varepsilon)$ и определяется по формулам:

4) $a = \infty$



Окрестность точки

Определение

ε -**окрестность** точки a обозначается как $U(a, \varepsilon)$ и определяется по формулам:

4) $a = \infty$

$$U(\infty, \varepsilon) = (-\infty, -\varepsilon) \cup (\varepsilon, +\infty) \cup \{\infty\}$$



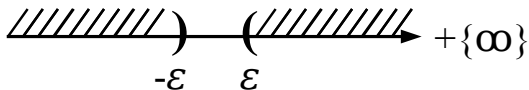
Окрестность точки

Определение

ε -**окрестность** точки a обозначается как $U(a, \varepsilon)$ и определяется по формулам:

4) $a = \infty$

$$U(\infty, \varepsilon) = (-\infty, -\varepsilon) \cup (\varepsilon, +\infty) \cup \{\infty\}$$



Окрестность точки

ε -окрестность часто называют **окрестностью** и обозначают $U(a)$, опуская символ ε .



Окрестность точки

ε -окрестность часто называют **окрестностью** и обозначают $U(a)$, опуская символ ε . В этом случае ε просто подразумевается.



Окрестность точки

ε -окрестность часто называют **окрестностью** и обозначают $U(a)$, опуская символ ε . В этом случае ε просто подразумевается. Обозначения $U(a, \varepsilon)$ и $U(a)$ эквивалентны.



Окрестность точки

Определение

Проколотой окрестностью точки a называется окрестность без самой точки a , т.е.

$$\overset{\circ}{U}(a, \varepsilon) = U(a, \varepsilon) \setminus a.$$

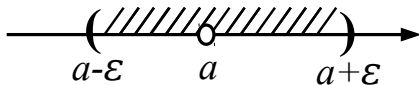


Окрестность точки

Определение

Проколотой окрестностью точки a называется окрестность без самой точки a , т.е.

$$\overset{\circ}{U}(a, \varepsilon) = U(a, \varepsilon) \setminus a.$$



Окрестность точки

Помимо двусторонней окрестности $U(a, \varepsilon)$ для действительных чисел можно ввести односторонние окрестности:



Окрестность точки

Помимо двусторонней окрестности $U(a, \varepsilon)$ для действительных чисел можно ввести односторонние окрестности:

1) правосторонняя окрестность



Окрестность точки

Помимо двусторонней окрестности $U(a, \varepsilon)$ для действительных чисел можно ввести односторонние окрестности:

1) правосторонняя окрестность

$$U_+(a, \varepsilon) = [a, a + \varepsilon), \mathring{U}_+(a, \varepsilon) = (a, a + \varepsilon)$$



Окрестность точки

Помимо двусторонней окрестности $U(a, \varepsilon)$ для действительных чисел можно ввести односторонние окрестности:

1) правосторонняя окрестность

$$U_+(a, \varepsilon) = [a, a + \varepsilon), \overset{\circ}{U}_+(a, \varepsilon) = (a, a + \varepsilon)$$

2) левосторонняя окрестность



Окрестность точки

Помимо двусторонней окрестности $U(a, \varepsilon)$ для действительных чисел можно ввести односторонние окрестности:

1) правосторонняя окрестность

$$U_+(a, \varepsilon) = [a, a + \varepsilon), \overset{\circ}{U}_+(a, \varepsilon) = (a, a + \varepsilon)$$

2) левосторонняя окрестность

$$U_-(a, \varepsilon) = (a - \varepsilon, a], \overset{\circ}{U}_-(a, \varepsilon) = (a - \varepsilon, a)$$



Типы стремления переменной к точке



Типы стремления переменной к точке

Рассмотрим произвольную переменную x ,
которая принимает последовательно значения
 $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$



Типы стремления переменной к точке

Рассмотрим произвольную переменную x , которая принимает последовательно значения $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$. В зависимости от вида последовательности $\{x_n\}$ можно выделить несколько типов стремления переменной x к точке a .



Типы стремления переменной к точке

1. Одностороннее стремление



Типы стремления переменной к точке

1. Одностороннее стремление

Говорят, что x **стремится к a справа**, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): x_n \in \overset{\circ}{U}_+(a, \varepsilon).$$



Типы стремления переменной к точке

1. Одностороннее стремление

Говорят, что x **стремится к a справа**, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): x_n \in \overset{\circ}{U}_+(a, \varepsilon).$$

Обозначение: $x \rightarrow a + 0$.



Типы стремления переменной к точке

1. Одностороннее стремление

Говорят, что x **стремится к a справа**, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): x_n \in \overset{\circ}{U}_+(a, \varepsilon).$$

Обозначение: $x \rightarrow a + 0$.

Пример:

$$x \rightarrow a + 0,$$

$$n(\varepsilon) = 2,$$

$$n(\varepsilon/2) = 3$$



Типы стремления переменной к точке

1. Одностороннее стремление

Говорят, что x **стремится к a справа**, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): x_n \in \overset{\circ}{U}_+(a, \varepsilon).$$

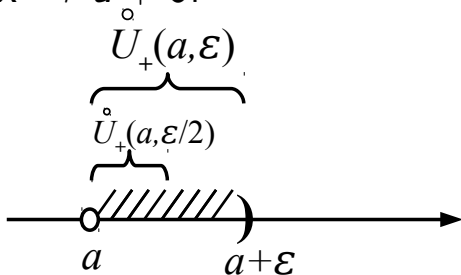
Обозначение: $x \rightarrow a + 0$.

Пример:

$$x \rightarrow a + 0,$$

$$n(\varepsilon) = 2,$$

$$n(\varepsilon/2) = 3$$



Типы стремления переменной к точке

1. Одностороннее стремление

Говорят, что x **стремится к a справа**, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): x_n \in \overset{\circ}{U}_+(a, \varepsilon).$$

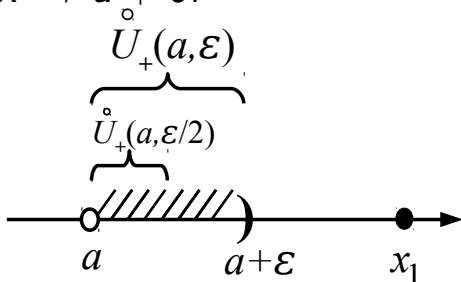
Обозначение: $x \rightarrow a + 0$.

Пример:

$$x \rightarrow a + 0,$$

$$n(\varepsilon) = 2,$$

$$n(\varepsilon/2) = 3$$



Типы стремления переменной к точке

1. Одностороннее стремление

Говорят, что x **стремится к a справа**, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): x_n \in \overset{\circ}{U}_+(a, \varepsilon).$$

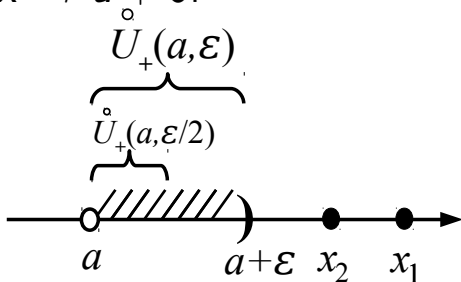
Обозначение: $x \rightarrow a + 0$.

Пример:

$$x \rightarrow a + 0,$$

$$n(\varepsilon) = 2,$$

$$n(\varepsilon/2) = 3$$



Типы стремления переменной к точке

1. Одностороннее стремление

Говорят, что x **стремится к a справа**, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): x_n \in \overset{\circ}{U}_+(a, \varepsilon).$$

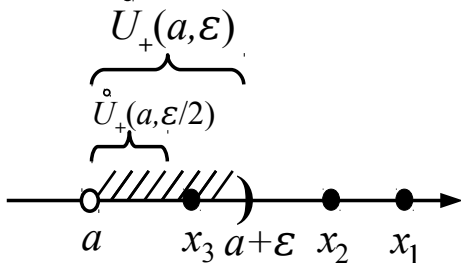
Обозначение: $x \rightarrow a + 0$.

Пример:

$$x \rightarrow a + 0,$$

$$n(\varepsilon) = 2,$$

$$n(\varepsilon/2) = 3$$



Типы стремления переменной к точке

1. Одностороннее стремление

Говорят, что x **стремится к a справа**, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): x_n \in \overset{\circ}{U}_+(a, \varepsilon).$$

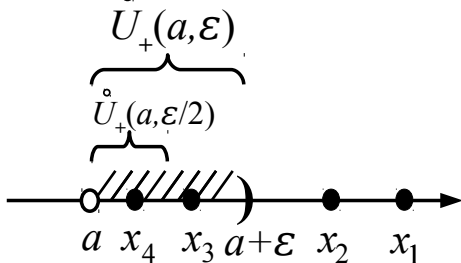
Обозначение: $x \rightarrow a + 0$.

Пример:

$$x \rightarrow a + 0,$$

$$n(\varepsilon) = 2,$$

$$n(\varepsilon/2) = 3$$



Типы стремления переменной к точке

1. Одностороннее стремление

Говорят, что x **стремится к a справа**, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): x_n \in \overset{\circ}{U}_+(a, \varepsilon).$$

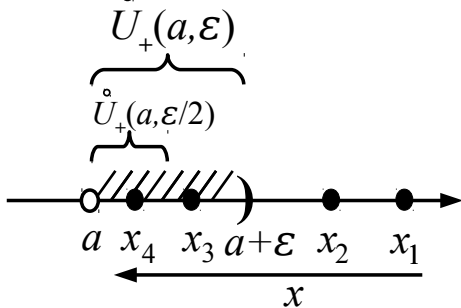
Обозначение: $x \rightarrow a + 0$.

Пример:

$$x \rightarrow a + 0,$$

$$n(\varepsilon) = 2,$$

$$n(\varepsilon/2) = 3$$



Типы стремления переменной к точке

1. Одностороннее стремление



Типы стремления переменной к точке

1. Одностороннее стремление

Говорят, что x **стремится к a слева**, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): x_n \in \overset{\circ}{U}_{-}(a, \varepsilon).$$



Типы стремления переменной к точке

1. Одностороннее стремление

Говорят, что x **стремится к a слева**, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): x_n \in \overset{\circ}{U}_-(a, \varepsilon).$$

Обозначение: $x \rightarrow a - 0$.



Типы стремления переменной к точке

1. Одностороннее стремление

Говорят, что x **стремится к a слева**, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): x_n \in \overset{\circ}{U}_-(a, \varepsilon).$$

Обозначение: $x \rightarrow a - 0$.

Пример:

$$x \rightarrow a - 0,$$

$$n(\varepsilon) = 2,$$

$$n(\varepsilon/2) = 3$$



Типы стремления переменной к точке

1. Одностороннее стремление

Говорят, что x **стремится к a слева**, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): x_n \in \overset{\circ}{U}_-(a, \varepsilon).$$

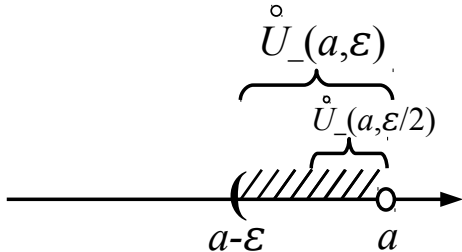
Обозначение: $x \rightarrow a - 0$.

Пример:

$$x \rightarrow a - 0,$$

$$n(\varepsilon) = 2,$$

$$n(\varepsilon/2) = 3$$



Типы стремления переменной к точке

1. Одностороннее стремление

Говорят, что x **стремится к a слева**, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): x_n \in \overset{\circ}{U}_-(a, \varepsilon).$$

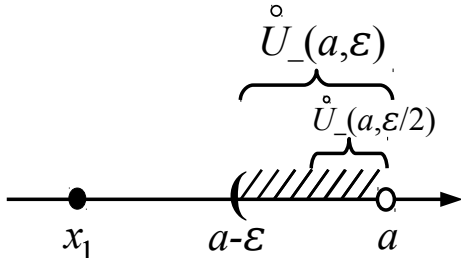
Обозначение: $x \rightarrow a - 0$.

Пример:

$$x \rightarrow a - 0,$$

$$n(\varepsilon) = 2,$$

$$n(\varepsilon/2) = 3$$



Типы стремления переменной к точке

1. Одностороннее стремление

Говорят, что x **стремится к a слева**, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): x_n \in \overset{\circ}{U}_-(a, \varepsilon).$$

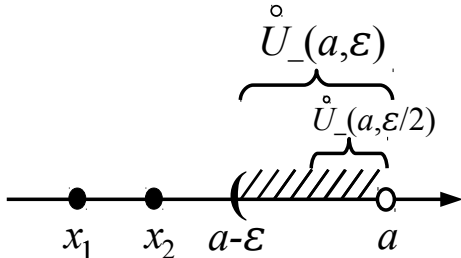
Обозначение: $x \rightarrow a - 0$.

Пример:

$$x \rightarrow a - 0,$$

$$n(\varepsilon) = 2,$$

$$n(\varepsilon/2) = 3$$



Типы стремления переменной к точке

1. Одностороннее стремление

Говорят, что x **стремится к a слева**, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): x_n \in \overset{\circ}{U}_-(a, \varepsilon).$$

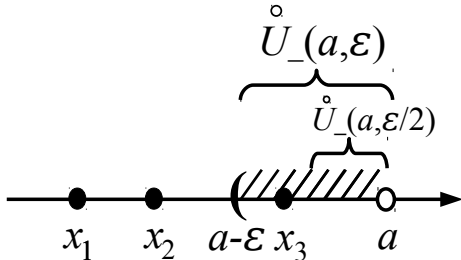
Обозначение: $x \rightarrow a - 0$.

Пример:

$$x \rightarrow a - 0,$$

$$n(\varepsilon) = 2,$$

$$n(\varepsilon/2) = 3$$



Типы стремления переменной к точке

1. Одностороннее стремление

Говорят, что x **стремится** к a **слева**, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): x_n \in \overset{\circ}{U}_-(a, \varepsilon).$$

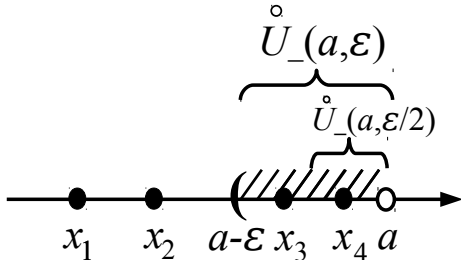
Обозначение: $x \rightarrow a - 0$.

Пример:

$$x \rightarrow a - 0,$$

$$n(\varepsilon) = 2,$$

$$n(\varepsilon/2) = 3$$



Типы стремления переменной к точке

1. Одностороннее стремление

Говорят, что x **стремится к a слева**, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): x_n \in \overset{\circ}{U}_-(a, \varepsilon).$$

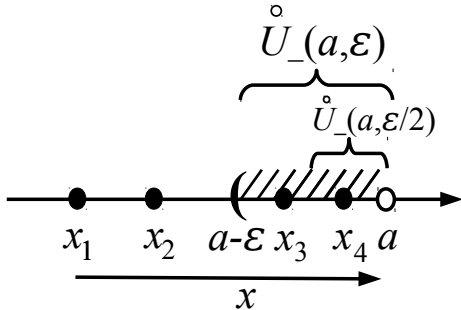
Обозначение: $x \rightarrow a - 0$.

Пример:

$$x \rightarrow a - 0,$$

$$n(\varepsilon) = 2,$$

$$n(\varepsilon/2) = 3$$



Типы стремления переменной к точке

2. Двустороннее стремление



Типы стремления переменной к точке

2. Двустороннее стремление

Говорят, что x **стремится** к a , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): x_n \in \overset{\circ}{U}(a, \varepsilon).$$



Типы стремления переменной к точке

2. Двустороннее стремление

Говорят, что x **стремится** к a , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): x_n \in \overset{\circ}{U}(a, \varepsilon).$$

Обозначение: $x \rightarrow a$.



Типы стремления переменной к точке

2. Двустороннее стремление

Говорят, что x **стремится** к a , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): x_n \in \overset{\circ}{U}(a, \varepsilon).$$

Обозначение: $x \rightarrow a$.

Пример:

$$x \rightarrow a,$$

$$n(\varepsilon) = 2,$$

$$n(\varepsilon/2) = 3$$



Типы стремления переменной к точке

2. Двустороннее стремление

Говорят, что x **стремится** к a , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): x_n \in \overset{\circ}{U}(a, \varepsilon).$$

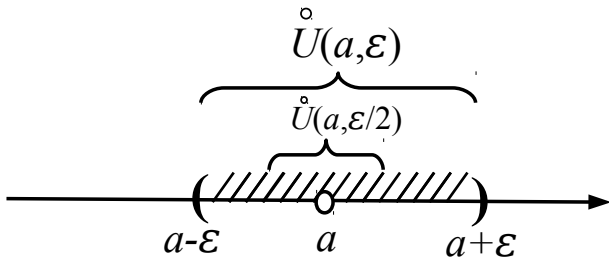
Обозначение: $x \rightarrow a$.

Пример:

$$x \rightarrow a,$$

$$n(\varepsilon) = 2,$$

$$n(\varepsilon/2) = 3$$



Типы стремления переменной к точке

2. Двустороннее стремление

Говорят, что x **стремится** к a , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): x_n \in \overset{\circ}{U}(a, \varepsilon).$$

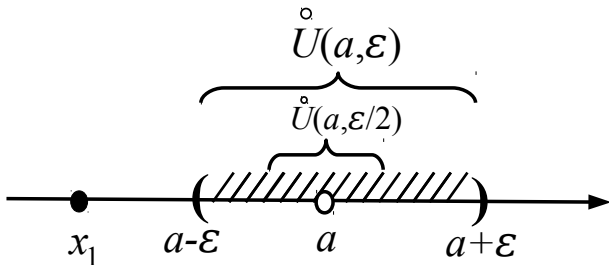
Обозначение: $x \rightarrow a$.

Пример:

$$x \rightarrow a,$$

$$n(\varepsilon) = 2,$$

$$n(\varepsilon/2) = 3$$



Типы стремления переменной к точке

2. Двустороннее стремление

Говорят, что x **стремится** к a , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): x_n \in \overset{\circ}{U}(a, \varepsilon).$$

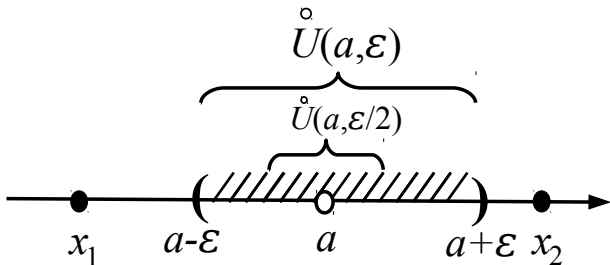
Обозначение: $x \rightarrow a$.

Пример:

$$x \rightarrow a,$$

$$n(\varepsilon) = 2,$$

$$n(\varepsilon/2) = 3$$



Типы стремления переменной к точке

2. Двустороннее стремление

Говорят, что x **стремится** к a , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): x_n \in \overset{\circ}{U}(a, \varepsilon).$$

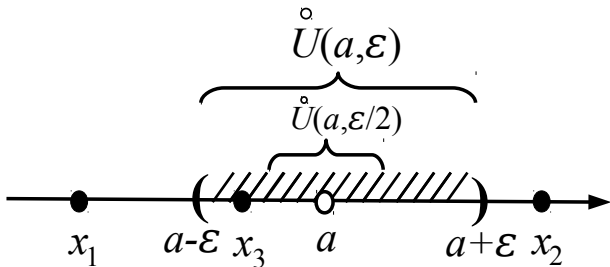
Обозначение: $x \rightarrow a$.

Пример:

$$x \rightarrow a,$$

$$n(\varepsilon) = 2,$$

$$n(\varepsilon/2) = 3$$



Типы стремления переменной к точке

2. Двустороннее стремление

Говорят, что x **стремится** к a , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): x_n \in \overset{\circ}{U}(a, \varepsilon).$$

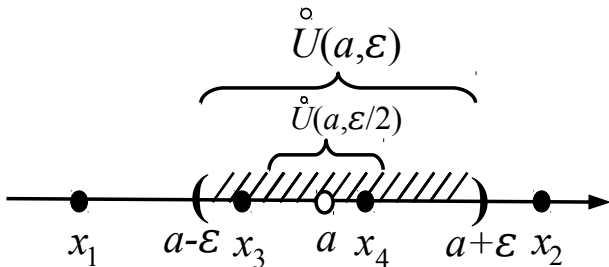
Обозначение: $x \rightarrow a$.

Пример:

$$x \rightarrow a,$$

$$n(\varepsilon) = 2,$$

$$n(\varepsilon/2) = 3$$



Типы стремления переменной к точке

2. Двустороннее стремление

Говорят, что x **стремится** к a , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): x_n \in \overset{\circ}{U}(a, \varepsilon).$$

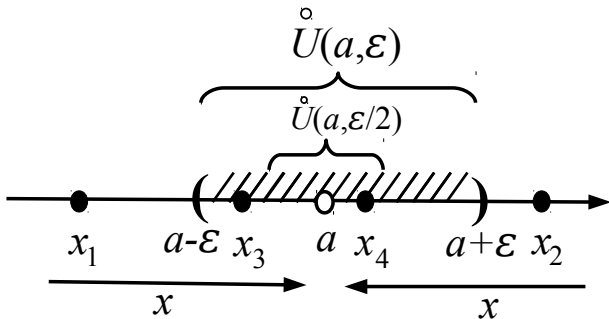
Обозначение: $x \rightarrow a$.

Пример:

$$x \rightarrow a,$$

$$n(\varepsilon) = 2,$$

$$n(\varepsilon/2) = 3$$



Предел функции



Предел функции

Пусть дана некоторая функция $y = f(x)$ и
пусть $x \rightarrow a$,



Предел функции

Пусть дана некоторая функция $y = f(x)$ и пусть $x \rightarrow a$, т.е. x последовательно принимает значения $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, которые с ростом n приближаются к точке a .



Предел функции

Пусть дана некоторая функция $y = f(x)$ и пусть $x \rightarrow a$, т.е. x последовательно принимает значения $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, которые с ростом n приближаются к точке a . Этой последовательности соответствует последовательность значений функции $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), \dots$, которая, в свою очередь, с ростом n приближается к некоторой точке b .



Предел функции

Определение

(в терминах последовательностей)

Точка b называется **пределом** функции

$f(x)$ при $x \rightarrow a$, если для любой

последовательности $\{x_n\}$ значений

переменной x такой, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$,

последовательность значений функции

$\{f(x_n)\}$ сходится к точке b , т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b$.



Предел функции

Определение

(в терминах последовательностей)

Точка b называется **пределом** функции $f(x)$ при $x \rightarrow a$, если для любой

последовательности $\{x_n\}$ значений

переменной x такой, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$,

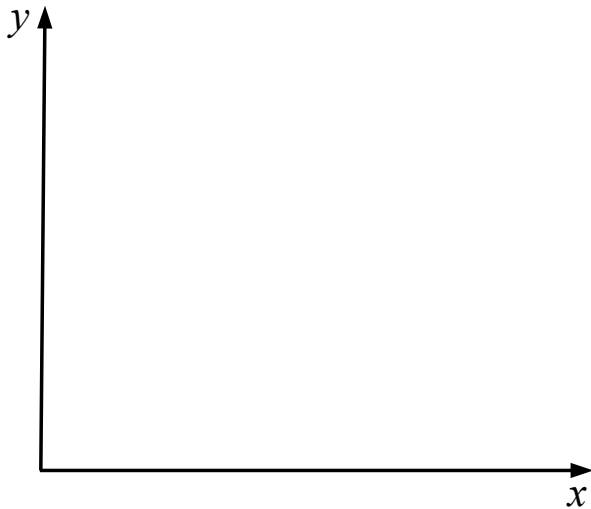
последовательность значений функции

$\{f(x_n)\}$ сходится к точке b , т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b$.

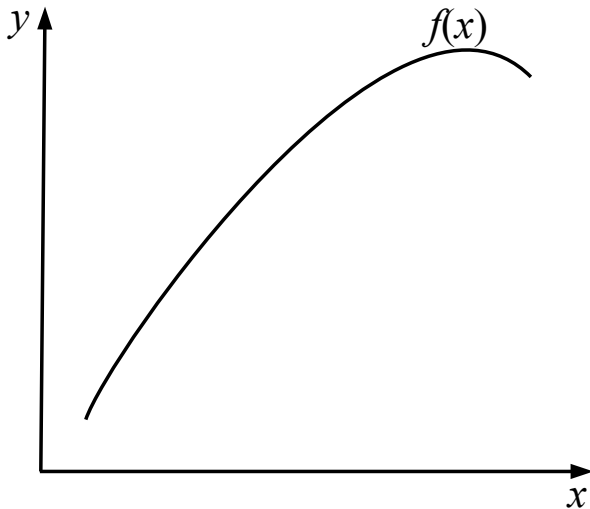
Обозначение: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$.



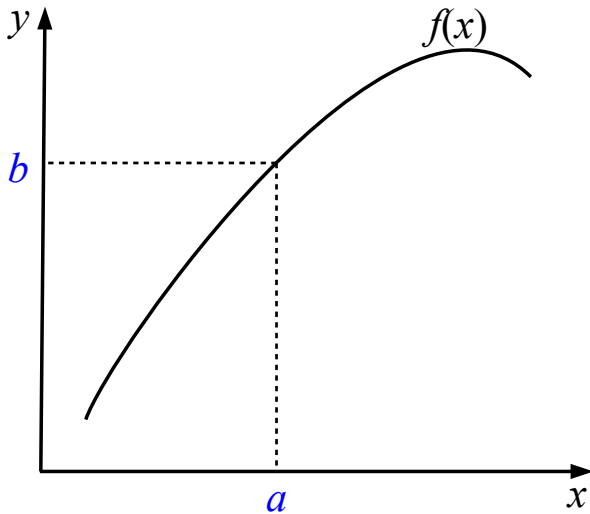
Предел функции



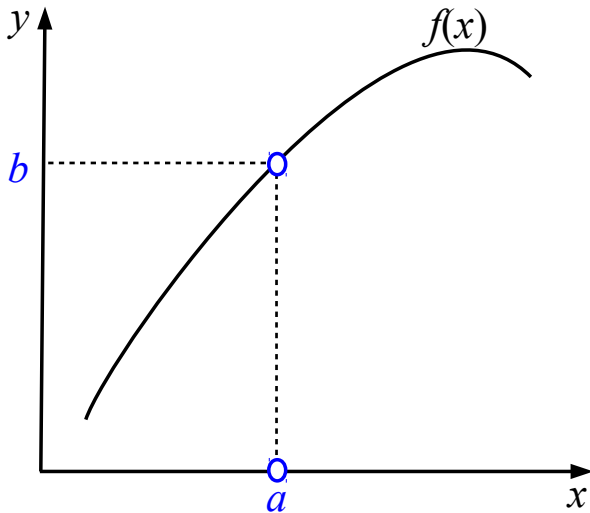
Предел функции



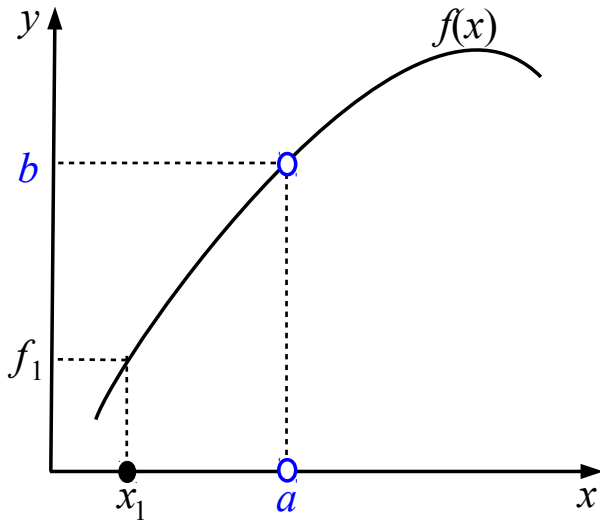
Предел функции



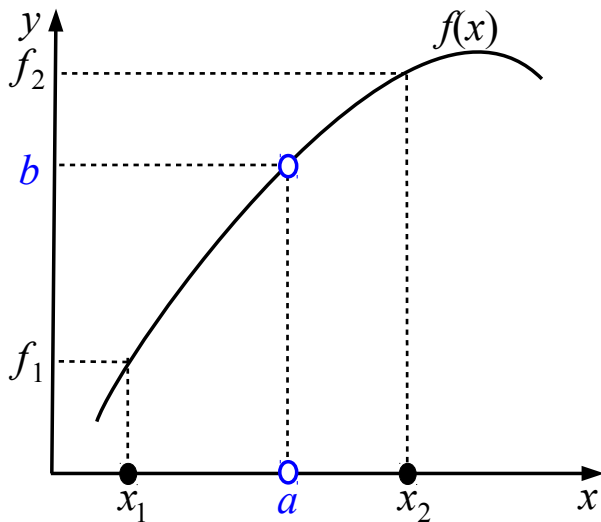
Предел функции



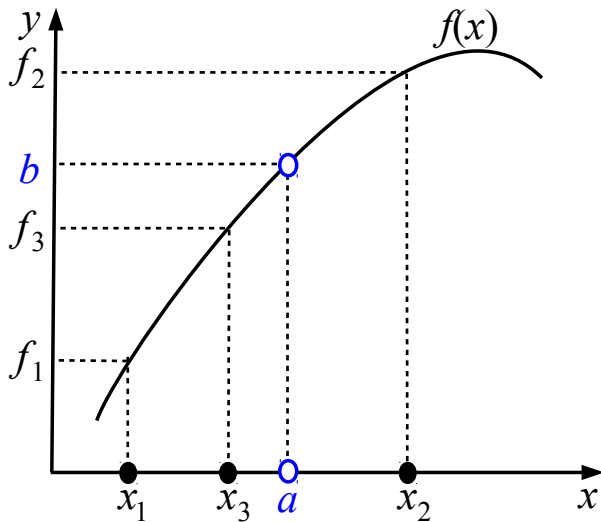
Предел функции



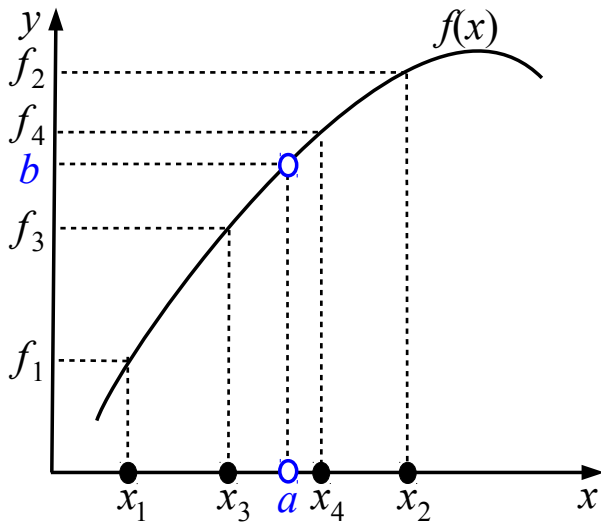
Предел функции



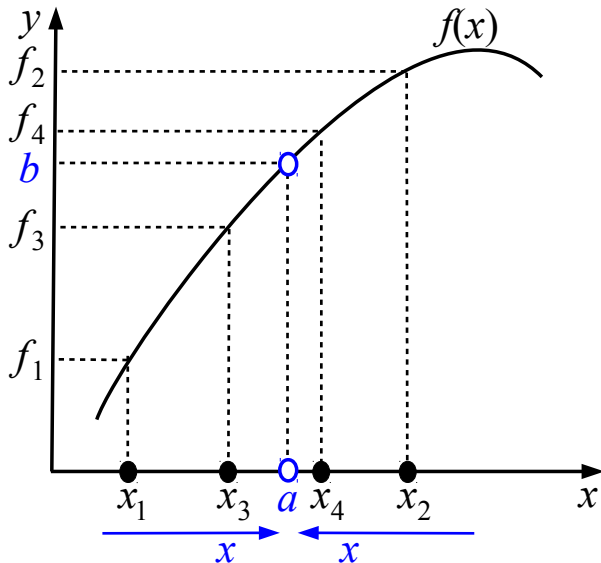
Предел функции



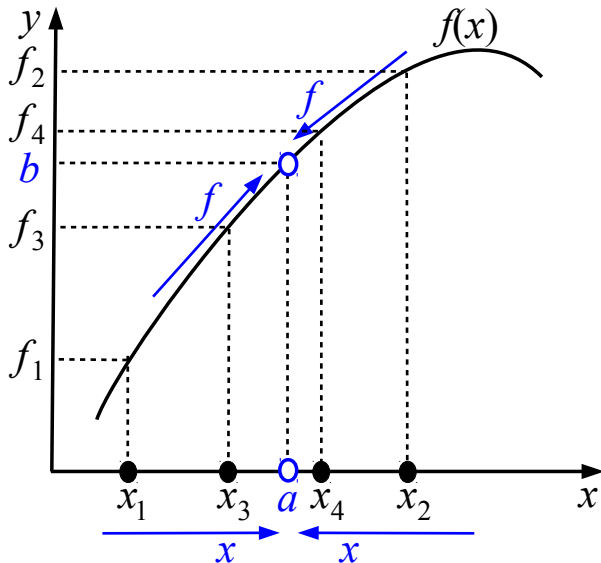
Предел функции



Предел функции



Предел функции



Предел функции

В данном определении точки a и b могут быть конечными числами или бесконечностями.

Если a - конечное число, то предел также часто называют **двусторонним пределом**.



Предел функции

Арифметические свойства пределов



Предел функции

Арифметические свойства пределов

Если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ и $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$, причем b и c - конечные числа, то



Предел функции

Арифметические свойства пределов

Если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ и $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$, причем b и c - конечные числа, то

$$1) \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = b \pm c$$



Предел функции

Арифметические свойства пределов

Если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ и $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$, причем b и c - конечные числа, то

- 1) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = b \pm c$
- 2) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = b \cdot c$



Предел функции

Арифметические свойства пределов

Если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ и $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$, причем b и c - конечные числа, то

$$1) \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = b \pm c$$

$$2) \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = b \cdot c$$

$$3) \lim_{x \rightarrow a} (f(x)/g(x)) = b/c, \text{ если } c \neq 0$$



Предел функции

Определение

(в терминах последовательностей)

Точка b называется **пределом** функции $f(x)$ **слева** при $x \rightarrow a$, если для любой последовательности $\{x_n\}$ значений переменной x такой, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ и $\forall n \ x_n < a$ ($x \rightarrow a - 0$), последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ сходится к точке b .



Предел функции

Определение

(в терминах последовательностей)

Точка b называется **пределом** функции $f(x)$ **слева** при $x \rightarrow a$, если для любой последовательности $\{x_n\}$ значений переменной x такой, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ и $\forall n \ x_n < a$ ($x \rightarrow a - 0$), последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ сходится к точке b .
Обозначение: $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = b$.



Предел функции

Определение

(в терминах последовательностей)

Точка b называется **пределом** функции $f(x)$ **справа** при $x \rightarrow a$, если для любой последовательности $\{x_n\}$ значений переменной x такой, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ и $\forall n \ x_n > a$ ($x \rightarrow a + 0$), последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ сходится к точке b .



Предел функции

Определение

(в терминах последовательностей)

Точка b называется **пределом** функции $f(x)$ **справа** при $x \rightarrow a$, если для любой

последовательности $\{x_n\}$ значений

переменной x такой, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ и

$\forall n \ x_n > a \ (x \rightarrow a + 0)$, последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ сходится к точке b .

Обозначение: $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = b$.



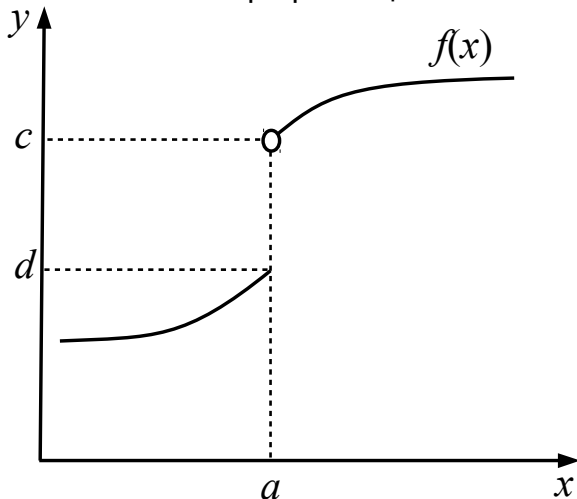
Предел функции

Геометрическая интерпретация:



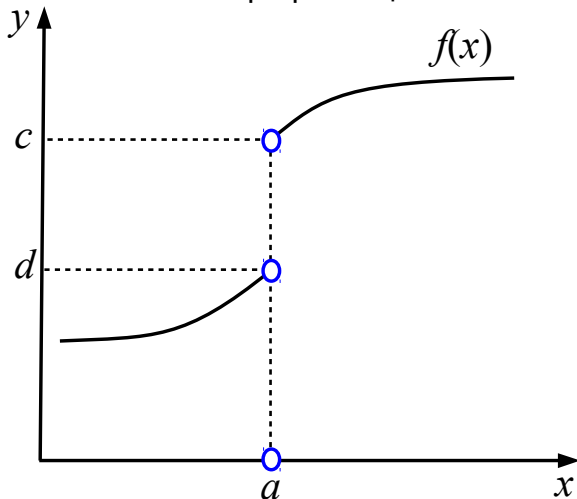
Предел функции

Геометрическая интерпретация:



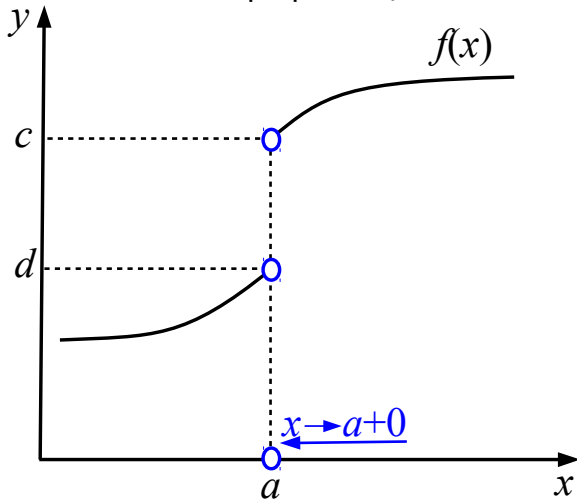
Предел функции

Геометрическая интерпретация:



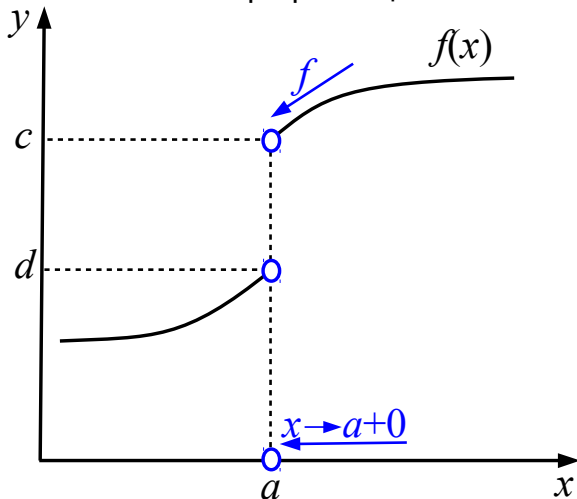
Предел функции

Геометрическая интерпретация:



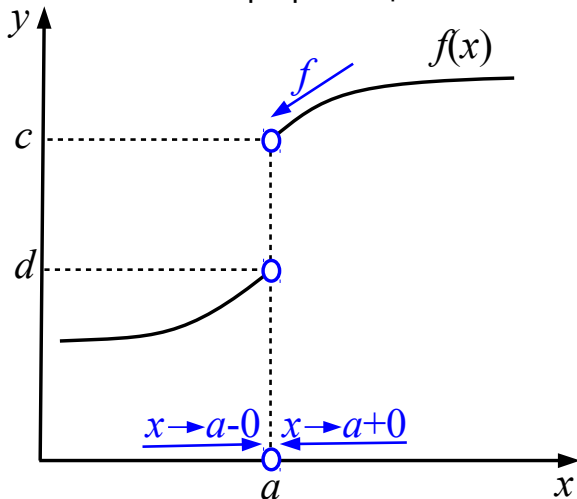
Предел функции

Геометрическая интерпретация:



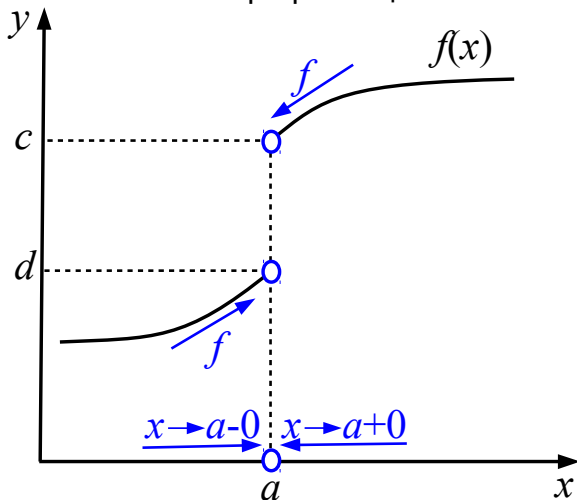
Предел функции

Геометрическая интерпретация:



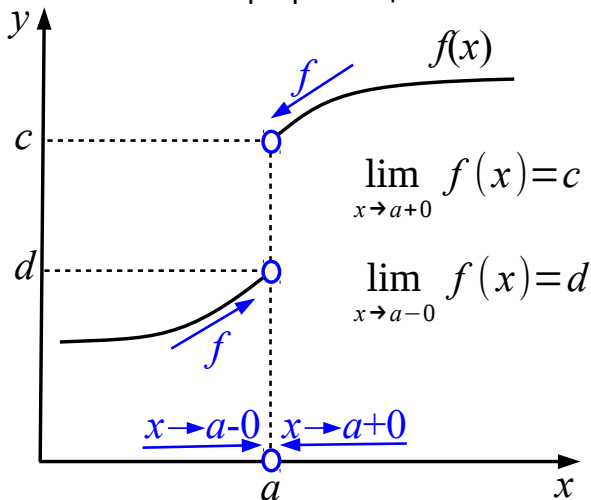
Предел функции

Геометрическая интерпретация:



Предел функции

Геометрическая интерпретация:



Замечательные пределы



Замечательные пределы

Первый замечательный предел:



Замечательные пределы

Первый замечательный предел:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1$$



Замечательные пределы

Первый замечательный предел:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1$$

Здесь u - произвольная функция, которая обладает свойством: $u \rightarrow 0$.



Замечательные пределы

Примеры:



Замечательные пределы

Примеры:

1) $u = 5x \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0$



Замечательные пределы

Примеры:

$$1) u = 5x \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x} = 1,$$



Замечательные пределы

Примеры:

$$1) u = 5x \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x} = 1,$$

$$2) u = 2x - 2 \rightarrow -2 \text{ при } x \rightarrow 0$$



Замечательные пределы

Примеры:

$$1) u = 5x \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x} = 1,$$

$$2) u = 2x - 2 \rightarrow -2 \text{ при } x \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x - 2)}{2x - 2} \neq 1.$$



Замечательные пределы

Следствия:



Замечательные пределы

Следствия:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} u}{u} = 1$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\arcsin u}{u} = 1$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} u}{u} = 1$$



Замечательные пределы

Второй замечательный предел:



Замечательные пределы

Второй замечательный предел:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{1/x} = e$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} (1 + u)^{1/u} = e$$



Замечательные пределы

Второй замечательный предел:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{1/x} = e$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} (1 + u)^{1/u} = e$$

Здесь u - произвольная функция, которая обладает свойством: $u \rightarrow 0$.



Замечательные пределы

Примеры:



Замечательные пределы

Примеры:

1) $u = 3x \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0$



Замечательные пределы

Примеры:

$$1) u = 3x \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{1/3x} = e,$$



Замечательные пределы

Примеры:

$$1) u = 3x \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{1/3x} = e,$$

$$2) u = 4x - 1 \rightarrow -1 \text{ при } x \rightarrow 0$$



Замечательные пределы

Примеры:

$$1) u = 3x \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{1/3x} = e,$$

$$2) u = 4x - 1 \rightarrow -1 \text{ при } x \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} (1 + (4x - 1))^{1/(4x-1)} \neq e.$$



Замечательные пределы

Следствия:



Замечательные пределы

Следствия:

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^u = e$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\ln(1+u)}{u} = 1$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{a^u - 1}{u} = \ln a$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{e^u - 1}{u} = 1$$

