

Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана  
Факультет “Фундаментальные науки”  
Кафедра “Высшая математика”

Математика  
Модуль 1. Векторы. Матрицы. СЛАУ  
Лекция 1.4

к.ф.-м.н. Семакин А.Н.



# Системы линейных алгебраических уравнений



### Определение

Системой из  $m$  линейных алгебраических уравнений с  $n$  неизвестными (сокращенно СЛАУ) называется система вида

[illegible]



# Системы линейных алгебраических уравнений

где числа  $a_{ij}$  ( $i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$ ) -  
это **коэффициенты** системы,



# Системы линейных алгебраических уравнений

где числа  $a_{ij}$  ( $i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$ ) -  
это **коэффициенты** системы, числа  
 $b_1, \dots, b_m$  - **свободные члены**,



# Системы линейных алгебраических уравнений

где числа  $a_{ij}$  ( $i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$ ) - это **коэффициенты** системы, числа  $b_1, \dots, b_m$  - **свободные члены**,  $x_1, \dots, x_n$  - **неизвестные**, которые надо определить.



# Системы линейных алгебраических уравнений

Запись СЛАУ в виде (1) называется  
**координатной.**



# Системы линейных алгебраических уравнений

Запись СЛАУ в виде (1) называется **координатной**. Эту систему можно записать в **матричной** форме

$$A \cdot X = B, \quad (2)$$





# Системы линейных алгебраических уравнений

Запись СЛАУ в виде (1) называется **координатной**. Эту систему можно записать в **матричной** форме

$$A \cdot X = B, \quad (2)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{– матрица системы,}$$



# Системы линейных алгебраических уравнений

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ – столбец неизвестных,}$$



# Системы линейных алгебраических уравнений

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ – столбец неизвестных,}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} \text{ – столбец свободных членов.}$$



# Системы линейных алгебраических уравнений

*Определение*

**Расширенной** матрицей системы (1) называется матрица  $\tilde{A}$  вида

$$\tilde{A} = \left( \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right).$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_A \quad \underbrace{\hspace{2em}}_B$



# Системы линейных алгебраических уравнений

## *Определение*

Система (1) называется **однородной**, если  $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$ , в противном случае она называется **неоднородной**.



# Системы линейных алгебраических уравнений

## *Определение*

**Решением** СЛАУ называется такой набор значений неизвестных  $x_1^{(\circ)}, x_2^{(\circ)}, \dots, x_n^{(\circ)}$ , который при подстановке в каждое уравнение системы (1) обращает его в верное тождество.



# Системы линейных алгебраических уравнений

## *Определение*

Система (1) называется **совместной**, если она имеет хотя бы одно решение и **несовместной**, если решений не имеет.



## *Определение*

Совместная система называется **определенной**, если она имеет единственное решение, и **неопределенной**, если она имеет более одного решения.





# Системы линейных алгебраических уравнений

## *Определение*

Совместная система называется **определенной**, если она имеет единственное решение, и **неопределенной**, если она имеет более одного решения. В последнем случае каждое конкретное решение называется **частным** решением системы.



# Системы линейных алгебраических уравнений

## *Определение*

Совокупность всех частных решений называется **общим** решением системы.



*Замечание.*

Однородная СЛАУ всегда совместна, поскольку нулевой набор значений ее неизвестных всегда является решением. Это решение называется **нулевым** или **тривиальным**.



# Критерий совместности СЛАУ



# Критерий совместности СЛАУ

*Теорема Кронекера-Капелли (о совместности СЛАУ)*



## *Теорема Кронекера-Капелли (о совместности СЛАУ)*

Для совместности системы (1) необходимо и достаточно, чтобы ранг ее матрицы  $A$  был равен рангу ее расширенной матрицы  $\tilde{A}$ .



# Критерий совместности СЛАУ

Для совместных СЛАУ верны следующие утверждения:



# Критерий совместности СЛАУ

Для совместных СЛАУ верны следующие утверждения:

1. Если ранг матрицы совместной системы равен числу неизвестных, то система имеет единственное решение.





# Критерий совместности СЛАУ

Для совместных СЛАУ верны следующие утверждения:

1. Если ранг матрицы совместной системы равен числу неизвестных, то система имеет единственное решение.
2. Если ранг матрицы совместной системы меньше числа неизвестных, то система имеет бесчисленное множество решений.



# Метод Крамера



# Метод Крамера

Метод Крамера предназначен для решения совместных СЛАУ, у которых число уравнений равно числу неизвестных ( $m = n$ ), и состоит из двух этапов:



# Метод Крамера

1. Вычисляем определитель матрицы системы  $\Delta = \det A$ , а также  $n$  вспомогательных определителей  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ , где  $\Delta_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$  получается из определителя  $\Delta$  путем замены в нем  $k$ -ого столбца на столбец свободных членов  $B$ :



# Метод Крамера

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \dots$$



2. Находим значения неизвестных по формулам

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \dots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}, \quad (3)$$



2. Находим значения неизвестных по формулам

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \dots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}, \quad (3)$$

Формулы (3) называются **формулами Крамера**,



2. Находим значения неизвестных по формулам

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \dots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}, \quad (3)$$

Формулы (3) называются **формулами Крамера**, а метод решения по данным формулам – **методом Крамера**.





# Метод Крамера

*Пример.* Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 = 1. \end{cases}$$



# Метод Крамера

*Пример.* Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 = 1. \end{cases}$$

Выписываем матрицы  $A$  и  $B$ :



# Метод Крамера

*Пример.* Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 = 1. \end{cases}$$

Выписываем матрицы  $A$  и  $B$ :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$



# Метод Крамера

находим определители



# Метод Крамера

находим определители

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1,$$



# Метод Крамера

находим определители

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7,$$



# Метод Крамера

находим определители

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5,$$



# Метод Крамера

находим определители

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5,$$

и вычисляем значения неизвестных





# Метод Крамера

находим определители

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5,$$

и вычисляем значения неизвестных

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{7}{-1} = -7,$$



# Метод Крамера

находим определители

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5,$$

и вычисляем значения неизвестных

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{7}{-1} = -7, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-5}{-1} = 5.$$



# Метод Гаусса



# Метод Гаусса

Методом Гаусса можно решать любые СЛАУ, включая те, в которых число уравнений отличается от числа неизвестных.



# Метод Гаусса

Методом Гаусса можно решать любые СЛАУ, включая те, в которых число уравнений отличается от числа неизвестных. Метод Гаусса условно можно разделить на два этапа:



# Метод Гаусса

Методом Гаусса можно решать любые СЛАУ, включая те, в которых число уравнений отличается от числа неизвестных. Метод Гаусса условно можно разделить на два этапа:

1. Прямой ход.



# Метод Гаусса

Методом Гаусса можно решать любые СЛАУ, включая те, в которых число уравнений отличается от числа неизвестных. Метод Гаусса условно можно разделить на два этапа:

1. Прямой ход.

На данном этапе исходная система уравнений с помощью элементарных преобразований приводится к равносильной системе ступенчатого вида.



# Метод Гаусса

Методом Гаусса можно решать любые СЛАУ, включая те, в которых число уравнений отличается от числа неизвестных. Метод Гаусса условно можно разделить на два этапа:  
2. Обратный ход.





# Метод Гаусса

Методом Гаусса можно решать любые СЛАУ, включая те, в которых число уравнений отличается от числа неизвестных. Метод Гаусса условно можно разделить на два этапа:  
2. Обратный ход.

Здесь последовательно, начиная с последнего уравнения полученной ступенчатой системы, находятся все неизвестные.



# Метод Гаусса

*Пример.* Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 10, \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 = -4. \end{cases}$$



# Метод Гаусса

*Пример.* Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 10, \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 = -4. \end{cases}$$

Выписываем матрицы  $A$  и  $B$ :



# Метод Гаусса

*Пример.* Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 10, \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 = -4. \end{cases}$$

Выписываем матрицы  $A$  и  $B$ :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 10 \\ -4 \end{pmatrix},$$



# Метод Гаусса

*Пример.* Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 10, \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 = -4. \end{cases}$$

Выписываем матрицы  $A$  и  $B$ :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 10 \\ -4 \end{pmatrix},$$

на их основе формируем расширенную матрицу системы:



# Метод Гаусса

*Пример.* Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 10, \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 = -4. \end{cases}$$

Выписываем матрицы  $A$  и  $B$ :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 10 \\ -4 \end{pmatrix},$$

на их основе формируем расширенную матрицу системы:

$$\tilde{A} = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 10 \\ 2 & -1 & 5 & -4 \end{array} \right)$$



# Метод Гаусса

и начинаем решение:



# Метод Гаусса

и начинаем решение:

1. С помощью элементарных преобразований приводим расширенную матрицу системы к ступенчатому виду:





# Метод Гаусса

и начинаем решение:

1. С помощью элементарных преобразований приводим расширенную матрицу системы к ступенчатому виду:

$$\tilde{A} = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 10 \\ 2 & -1 & 5 & -4 \end{array} \right)$$



# Метод Гаусса

и начинаем решение:

1. С помощью элементарных преобразований приводим расширенную матрицу системы к ступенчатому виду:

$$\tilde{A} = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 10 \\ 2 & -1 & 5 & -4 \end{array} \right) \xrightarrow{(1)} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 10 \\ 0 & 3 & 3 & -24 \end{array} \right)$$

(1) первую строку умножили на 2 и вычли из второй,



# Метод Гаусса

и начинаем решение:

1. С помощью элементарных преобразований приводим расширенную матрицу системы к ступенчатому виду:

$$\tilde{A} = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 10 \\ 2 & -1 & 5 & -4 \end{array} \right) \stackrel{(1)}{\sim} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 10 \\ 0 & 3 & 3 & -24 \end{array} \right) \stackrel{(2)}{\sim} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & -8 \end{array} \right).$$

(2) вторую строку разделили на 3.



2. Находим ранги матрицы системы  $A$  и расширенной матрицы системы  $\tilde{A}$ .



2. Находим ранги матрицы системы  $A$  и расширенной матрицы системы  $\tilde{A}$ . Ранг матрицы равен числу ненулевых строк эквивалентной ей ступенчатой матрицы, получающейся из данной матрицы в результате элементарных преобразований.



# Метод Гаусса

Ступенчатая матрица для  $\tilde{A}$  получена в пункте 1.



# Метод Гаусса

Ступенчатая матрица для  $\tilde{A}$  получена в пункте 1. Ступенчатая матрица для  $A$  получается путем удаления из ступенчатой матрицы для  $\tilde{A}$  последнего столбца.



# Метод Гаусса

Ступенчатая матрица для  $\tilde{A}$  получена в пункте 1. Ступенчатая матрица для  $A$  получается путем удаления из ступенчатой матрицы для  $\tilde{A}$  последнего столбца.

$$\text{Если } \tilde{A} \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & -8 \end{array} \right),$$





# Метод Гаусса

Ступенчатая матрица для  $\tilde{A}$  получена в пункте 1. Ступенчатая матрица для  $A$  получается путем удаления из ступенчатой матрицы для  $\tilde{A}$  последнего столбца.

$$\text{Если } \tilde{A} \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & -8 \end{array} \right), \text{ то } A \sim \left( \begin{array}{ccc} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$



# Метод Гаусса

Ступенчатая матрица для  $\tilde{A}$  получена в пункте 1. Ступенчатая матрица для  $A$  получается путем удаления из ступенчатой матрицы для  $\tilde{A}$  последнего столбца.

$$\text{Если } \tilde{A} \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & -8 \end{array} \right), \text{ то } A \sim \left( \begin{array}{ccc} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Получаем, что  $r(A) = r(\tilde{A}) = 2$ .



# Метод Гаусса

Следовательно,  
по теореме Кронекера-Капелли система  
совместна, т.е. имеет решение.



Следовательно,  
по теореме Кронекера-Капелли система  
совместна, т.е. имеет решение.

Поскольку количество неизвестных  $n = 3$   
больше ранга матрицы  $r(A)$ , то система имеет  
бесконечно много решений.



3. Из элементов получившейся в пункте 1 ступенчатой матрицы составляем отличный от нуля определитель порядка, равного рангу матрицы  $r(A)$ .



3. Из элементов получившейся в пункте 1 ступенчатой матрицы составляем отличный от нуля определитель порядка, равного рангу матрицы  $r(A)$ . В нашем случае необходимо составить определитель второго порядка.



# Метод Гаусса

Для этого возьмем элементы первого и второго столбцов:



# Метод Гаусса

Для этого возьмем элементы первого и второго столбцов:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$





# Метод Гаусса

Для этого возьмем элементы первого и второго столбцов:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$



# Метод Гаусса

Для этого возьмем элементы первого и второго столбцов:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Если бы этот определитель оказался равен нулю, то нам было бы необходимо выбрать другие столбцы, исключая последний, соответствующий столбцу свободных членов.



4. Определяем **базисные** неизвестные, т.е. неизвестные, коэффициенты при которых располагаются во включенных в определитель столбцах.



4. Определяем **базисные** неизвестные, т.е. неизвестные, коэффициенты при которых располагаются во включенных в определитель столбцах. Поскольку мы включили в определитель первый и второй столбцы, то базисными неизвестными будут  $x_1$  и  $x_2$ .



4. Определяем **базисные** неизвестные, т.е. неизвестные, коэффициенты при которых располагаются во включенных в определитель столбцах. Поскольку мы включили в определитель первый и второй столбцы, то базисными неизвестными будут  $x_1$  и  $x_2$ . Оставшуюся неизвестную  $x_3$  будем называть **свободной**.



5. Выписываем систему уравнений, соответствующую полученной в пункте 1 ступенчатой матрице:



5. Выписываем систему уравнений, соответствующую полученной в пункте 1 ступенчатой матрице:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 10, \\ x_2 + x_3 = -8. \end{cases}$$



6. Положим, что свободная неизвестная  $x_3 = c$ , где  $c$  - произвольная постоянная,





6. Положим, что свободная неизвестная  $x_3 = c$ , где  $c$  - произвольная постоянная, и перенесем в системе уравнений слагаемые, содержащие свободную неизвестную, в правую часть уравнений:



6. Положим, что свободная неизвестная  $x_3 = c$ , где  $c$  - произвольная постоянная, и перенесем в системе уравнений слагаемые, содержащие свободную неизвестную, в правую часть уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 10 - c, \\ x_2 = -8 - c. \end{cases}$$



# Метод Гаусса

Введение произвольной постоянной  $c$  обусловлено тем, что из двух уравнений мы можем однозначно найти лишь две неизвестные, в качестве которых выбираются базисные неизвестные  $x_1$  и  $x_2$ .



# Метод Гаусса

Введение произвольной постоянной  $c$  обусловлено тем, что из двух уравнений мы можем однозначно найти лишь две неизвестные, в качестве которых выбираются базисные неизвестные  $x_1$  и  $x_2$ . Свободная неизвестная  $x_3$  может принимать любые значения, однозначно ее найти нельзя.



7. Последовательно, начиная с последнего уравнения системы найдем выражения базисных неизвестных через свободные:



7. Последовательно, начиная с последнего уравнения системы найдем выражения базисных неизвестных через свободные:

$$x_2 = -8 - c,$$



7. Последовательно, начиная с последнего уравнения системы найдем выражения базисных неизвестных через свободные:

$$x_2 = -8 - c,$$

$$x_1 = 10 - c + 2x_2$$



7. Последовательно, начиная с последнего уравнения системы найдем выражения базисных неизвестных через свободные:

$$x_2 = -8 - c,$$

$$x_1 = 10 - c + 2x_2 = -6 - 3c.$$





8. Выписываем решение:

$$\begin{cases} x_1 = -6 - 3c, \\ x_2 = -8 - c, \\ x_3 = c. \end{cases}$$



8. Выписываем решение:

$$\begin{cases} x_1 = -6 - 3c, \\ x_2 = -8 - c, \\ x_3 = c. \end{cases}$$

Данное решение является общим решением системы,



8. Выписываем решение:

$$\begin{cases} x_1 = -6 - 3c, \\ x_2 = -8 - c, \\ x_3 = c. \end{cases}$$

Данное решение является общим решением системы, т.е. содержит в себе все частные решения, которые получаются путем придания произвольной постоянной  $c$  конкретных значений.



# Метод Гаусса

Например, положив  $c = 0$ , получим конкретное частное решение

$$\begin{cases} x_1 = -6, \\ x_2 = -8, \\ x_3 = 0. \end{cases}$$

